جامعة البعث　　　　معادلات تفاضلية /2/　　　　اسم الطالب :

كلية العلوم – قسم الرياضيات　　　　الدورة الصيفيةللعام الدراسي 2016-2017

السؤال الأول : (15+15=30درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية

$$x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=x^3e^{-x}\sin 2x$$

المطلوب :: 1"- بأجراء التغير المناسب أحذف المشتقة الأولى من المعادلة

2"- أوجد الحل العام للمعادلة الناتجة ، ماهو الحل العام لهذه المعادلة .

السؤال الثاني : (35درجة)

أوجد الحل العام للمعادلة $(3x^3+x)y''+2y'-6xy=\dfrac{(3x^2+1)^2}{x}$

إذا علمت أنّ للمعادلة المتجانسة المناظرة حلول خاصة على هيئة كثيرات حدود

السؤال الثالث : (35درجة)

لتكن لدينا المعادلة التفاضلية الآتية

$$y^{(4)}+4y'''+10y''+12y'+5y=e^{-x}+\sin 2x$$

المطلوب::1"- أوجد الحل العام للمتجانسة المناظرة إذا علمت أنّ الدالة $y=e^{-x}\cos 2x$

حل خاص للمتجانسة المناظرة .

2"- اقترح حلا" خاصا لهذه المعادلة بطريقة المعاملات غير المعينة دون تعيينها

3"- أوجد حلا" خاصا" بطريقة المؤثر التفاضلي العكسي ما هو الحل العام

****

مدرس المقرر

د. رامز الشيخ فتوح

جواب السؤال الأول : (15+15=30درجة)

"1 ـالمعادلة تكتب على الصورة $y''-\frac{2}{x}y'+(1+\frac{2}{x^2})y=xe^{-x}\sin 2x$ 1

(15)

أي أن $a_1(x)=-\frac{2}{x}$,وبالتالي بالتعويض في التحويل $y=e^{-\frac{1}{2}\int a_1(x)dx}z$ 2

$y=xz$ يكون $\Leftarrow y'=z+xz' \Leftarrow y''=2z'+xz''$ $y=e^{\int\frac{dx}{x}}z=e^{\ln x}z=xz$ (2+2+2)

نعوض في المعادلة ونختصر فنجد أن $z''+z=e^{-x}\sin 2x$. 6

"2 – الحل العام يعطى بالصيغة $z=z_h+z_p$ من أجل إيجاد z_h

(15)

المعادلة المميزة هي $m^2+1=0$ جذراها هما $m_1=i$, $m_2=-i$ 7

وبالتالي $z_h=A_1\cos x+A_2\sin x$

$$z_p=\frac{1}{D^2+1}e^{-x}\sin 2x=e^{-x}\frac{1}{(D-1)^2+1}\sin 2x=e^{-x}\frac{1}{D^2-2D+2}\sin 2x$$ 1+1+1

$$z_p=e^{-x}\frac{1}{-4-2D+2}\sin 2x=\frac{e^{-x}}{-2}\frac{1}{D+1}\sin 2x=-\frac{e^{-x}}{2}\left[\frac{1}{4+1}(-2\cos 2x+\sin 2x)\right]$$ 2

$$z_p=\frac{1}{5}e^{x}\cos 2x+\frac{1}{10}e^{-x}\sin 2x$$ 1

وبالتالي فإن $z=A_1\cos x+A_2\sin x+e^{-x}(\frac{\cos 2x}{5}+\frac{\sin 2x}{10})$ 1

ومنه فإن $y=xz=A_1x\cos x+A_2x\sin x+xe^{-x}(\frac{\cos 2x}{5}+\frac{\sin 2x}{10})$ 1

جواب السؤال الثاني :(35درجة)

ملاحظة يمكن ايجاد z_p بطريقة غير الطريقة المذكورة

جواب السؤال الثاني:

المعادلة المتجانسة المناظرة هي $(3x^3+x)y''+2y'-6xy=0 \quad (*)$

2 نفرض أن $y = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_1x + a_0$

2+2 ومنه فأن $y' = nx^{n-1} + ... + a_1$, $y'' = n(n-1)x^{n-2} + ... + 2a_2$

$y'' = n(n-1)x^{n-2} + ...$

2 نعوض في (*) فنجد أن $(3n^2-3n-6)x^{n+1} + ... = 0$

2+2 من أجل $3n^2-3n-6=0$ فأن $n_1=-1$, $n_2=2$

4

من أجل $n=-1$ للتأكد من كون الدالة $y_1 = \frac{1}{x}$ حلا" أم لا نشتقها مرتين

ونعوض في (*) $y' = -\frac{1}{x^2} \Leftarrow y'' = \frac{2}{x^3}$ بالتعويض نجد أن

$6 + \frac{2}{x^2} - \frac{2}{x^2} - 6 = 0$ أي أن $0=0$ أي أن الدالة حققت المعادلة فهي حل

4

من أجل $n=2$ نفرض أن $y_2 = x^2 + Ax + B$ وبالتالي فأن

$y_2' = 2x + A \Leftarrow y_2'' = 2$ نعوض y_2 y_2' y_2'' في (*) فنجد

$-6Ax^2 + (6-6B)x + 2A = 0$ بالمطابقة نجد أن $A=0$ $B=1$ ومنه

1 فأن $y_2 = x^2+1$ أي أن $y_h = A_1(x^2+1) + \frac{A_2}{x}$

(21)

1 ونعلم أن $y_p = y_1\int\frac{w_1}{w}dx + y_2\int\frac{w_2}{w}dx$

2+2 $w(x^2+1, \frac{1}{x}) = -\frac{3x^2+1}{x^2}$ $\quad W_1 = -\frac{3x^2+1}{x^3}$

2 $W_2 = \frac{(x^2+1)(3x^2+1)}{x^2}$

(14)

يتبع

Scanned by CamScanner

2 $$y_p = (x^2+1)\int \frac{\frac{-(3x^2+1)}{x^3}}{-\frac{3x^2+1}{x^2}}dx + \frac{1}{x}\int \frac{\frac{(3x^2+1)(x^2+1)}{x^2}}{-\frac{3x^2+1}{x^2}}dx$$

وبالتالي فأن

2+2 $$y_p = +(x^2+1)\int\frac{dx}{x} - \frac{1}{x}\int(x^2+1)dx = +(x^2+1)\ln x - \frac{1}{x}\left(\frac{x^3}{3}+x\right)$$

$$y_p = +(x^2+1).\ln x - \left(\frac{x^2}{3}+1\right)$$

1 $$y = y_h + y_p = A_1(x^2+1) + \frac{A_2}{x} + (x^2+1)\ln x - \left(\frac{x^2}{3}+1\right)$$

جواب السؤال الثالث : (11+11+11+2=35درجة)

(11) "1 – المعادلة المميزة للمعادلة المتجانسة المناظرة هي

$$m^4 + 4m^3 + 10m^2 + 12m + 5 = 0$$

1 الحل $y = e^{-x}\cos 2x$ ينتج عن جذر للمعادلة المميزة قيمته $m_1 = -1-2i$

1 وبالتالي فأن $m_2 = -1+2i$ يكون أيضا جذر للمعادلة المميزة وبما أن

2 $$(m-m_1).(m-m_2) = (m+1-2i).(m+1+2i) = m^2+2m+5)$$

2 فالمعادلة المميزة تكتب على الصورة $(m^2+2m+5)(m^2+2m+1) = 0$

2 وبالتالي فأنّ الجذور هي $m_1 = -1+2i$, $m_2 = -1-2i$, $m_3 = m_4 = -1$

3 والحل العام هو $y_h = e^{-x}(A_1\cos 2x + A_2\sin 2x) + e^{-x}(A_3x + A_4)$

(11) "2- الحل الخاص المقترح وفق القاعدة الأساسية هو

5 $$y_p = B_1e^{-x} + B_2\sin 2x + B_3\cos 2x$$

2 نلاحظ أنّ هنك أشتراك بين y_p y_h نزيل هذا الأشتراك بأن نضرب الجزء المشترك الموجود في y_p ب x^2 فيصبح الحل الخاص المقترح من الشكل

4 $$y_p = B_1 x^2 e^{-x} + B_2 \sin 2x + B_3 \cos 2x$$

(١١) - "3

2 $$y_p = \frac{1}{D^4 + 4D^3 + 10D^2 + 12D + 5} e^{-x} + \sin 2x$$

أي أن

$$y_p = y_{p_1} + y_{p_2}$$

4

4 $$y_{p_1} = \frac{1}{D^4 + 4D^3 + 10D^2 + 12D + 5} e^{-x} = \frac{x^2}{12D^2 + 24D + 20} e^{-x} = \Big|_{D=-1}$$

$$y_{p_1} = \frac{x^2}{12 - 24 + 20} e^{-x} = \frac{x^2}{8} e^{-x}$$

2 $$y_{p_2} = \frac{1}{(-4)^2 - 16D - 40 + 12D + 5} \sin 2x = \frac{1}{-4D - 19} \sin 2x =$$

2 $$= \frac{-1}{4} \frac{1}{D + \frac{19}{4}} \sin 2x = \frac{-1}{4} \frac{1}{(4 + (\frac{19}{4})^2)} (-2\cos 2x + \frac{19}{4} \sin 2x) = \frac{-4}{425} (-2\cos 2x + \frac{19}{4} \sin 2x)$$

ومنه فأن

1 $$y_p = \frac{x^2}{8} e^{-x} + \frac{8}{425} \cos 2x - \frac{19}{425} \sin 2x$$

وبما أن $y = y_h + y_p$ فأن

2 $$y = e^{-x}(A_1 \cos x + A_2 \sin x) + \frac{x^2 e^{-x}}{8} + \frac{8}{425} \cos 2x - \frac{19}{425} \sin 2x$$

مدرس المقرر

د. رزان الشيخ نوح